

Barem clasa a X-a (OLM 2017-etapa locală)

Subiectul I. (7 puncte)

Ecuția se scrie: $5^{\left(3^{2 \cdot x^2 - 8} - 2 \cdot 3^{x^2 - 4} + 1\right) \cdot \log_5 7} + 5^{x^2 - 4} + 5^{2 \cdot (4 - 2 \cdot |x|)} = 3.$ (1 punct)

Cum $\left(3^{2 \cdot x^2 - 8} - 2 \cdot 3^{x^2 - 4} + 1\right) \cdot \log_5 7 + (x^2 - 4) + 2(4 - 2 \cdot |x|) = \left(3^{x^2 - 4} - 1\right)^2 \cdot \log_5 7 + (|x| - 2)^2 \geq 0,$ (1 punct)

utilizând inegalitatea mediilor, avem

$$1 = \frac{5^{\left(3^{2 \cdot x^2 - 8} - 2 \cdot 3^{x^2 - 4} + 1\right) \cdot \log_5 7} + 5^{x^2 - 4} + 5^{2 \cdot (4 - 2 \cdot |x|)}}{3} \geq \sqrt[3]{5^{\left(3^{2 \cdot x^2 - 8} - 2 \cdot 3^{x^2 - 4} + 1\right) \cdot \log_5 7} \cdot 5^{x^2 - 4} \cdot 5^{2 \cdot (4 - 2 \cdot |x|)}} \geq \sqrt[3]{5^0} = 1, \text{ (2 puncte)}$$

deci avem egalitate în inegalitatea mediilor. Rezultă $5^{\left(3^{2 \cdot x^2 - 8} - 2 \cdot 3^{x^2 - 4} + 1\right) \cdot \log_5 7} = 5^{x^2 - 4} = 5^{2 \cdot (4 - 2 \cdot |x|)}$

și $(3^{2 \cdot x^2 - 8} - 2 \cdot 3^{x^2 - 4} + 1) + (x^2 - 4) + 2 \cdot (4 - 2 \cdot |x|) = 0.$ (2 puncte)

Obținem $\left(3^{x^2 - 4} - 1\right)^2 \cdot \log_5 7 + (|x| - 2)^2 = 0$ și soluțiile sunt $x = -2$ și $x = 2.$ (1 punct)

Subiectul II. (7 puncte)

a) $\log_a b + \log_a c + \log_b c + \log_b a + \log_c a + \log_c b =$
 $(\log_a b + \log_b a) + (\log_a c + \log_c a) + (\log_b c + \log_c b) \geq 2 + 2 + 2 = 6,$ (2 puncte)

folosind inegalitatea $A + \frac{1}{A} \geq 2, A > 0$

b) Inegalitatea se mai scrie: $\frac{1}{2} \log_a \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + \frac{1}{2} \log_b \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + \frac{1}{2} \log_c \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq 3,$

adică $\log_a \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} + \log_b \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} + \log_c \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq 3.$ (2 puncte)

Din inegalitatea mediilor $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} = \sqrt[3]{abc},$ (1 punct)

Deci membrul stâng este mai mare decât

$\log_a \sqrt[3]{abc} + \log_b \sqrt[3]{abc} + \log_c \sqrt[3]{abc} =$
 $= \frac{1}{3} (3 + \log_a b + \log_b a + \log_a c + \log_c a + \log_b c + \log_c b) \geq \frac{1}{3} (3 + 6) = 3.$ (2 puncte)

Subiectul III. (7 puncte)

a) $2017 = 3 \cdot 672 + 1 \Rightarrow z = (1 + \varepsilon)^{672} \cdot (1 + \varepsilon^2)^{672} \cdot 2^{672}(1 + \varepsilon) \Leftrightarrow$

(1 punct)

$$z = 2^{672} \cdot (1 + \varepsilon) = 2^{672} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2^{672} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

(2 puncte)

$$|z| = 2^{672}, \arg z = \frac{\pi}{3}$$

(1 punct)

b) $z_1 \neq 0$ și $z_2 \neq 0$, (dacă $z_1 = 0 \Rightarrow z_2 = 0$, dar $z_1 \neq z_2$).

Împărțind prin $|z_2|$ egalitățile $\Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1 = \left| \frac{z_1}{z_2} + 1 \right|$.

(1 punct)

Dacă $\frac{z_1}{z_2} = u \in \mathbf{C} \Rightarrow |u| = |u + 1| = 1, u = a + bi, a, b \in \mathbf{R}$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (a + 1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1 punct)

decî $u \in \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$, deci $u^3 = 1 \Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^3 = 1$.

(1 punct)

Subiectul IV. (7 puncte)

Deoarece $\log_{n^3-n}(n + 1) + \log_{n^3-n} n + \log_{n^3-n}(n - 1) = 1$ și

$$\log_{n^3-n}(n + 1) > 0, \log_{n^3-n} n > 0, \log_{n^3-n}(n - 1) > 0$$

(2 puncte)

avem rezultatul (1).

(1) Dacă $a + b + c = 1$ și $a, b, c > 0$ atunci $2(a^2 + b^2 + c^2) + 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 1$.

(1 punct)

Utilizăm inegalitatea mediilor.

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} \geq \frac{1}{3} &\rightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \frac{1}{27} \rightarrow 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq \frac{1}{3} \\ \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{1}{3} &\rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \frac{1}{9} \rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} + \rightarrow (1)$$

(4 puncte)